4　極座標

物理法則は、ベクトルを用いることにより座標軸の選び方にはよらない形で表現できる。しかし、問題を実際に解くためには、その系の対称性に合わせた座標系を選ぶことが重要になってくることが多い。これまで、直交座標系を使ってきたが、例えば球対称のような場合には極座標を用いた方が簡潔に記述できる[1]。惑星の運動とか振り子やコマの運動などを扱う場合は、２次元の極座標（平面極座標とも言う）や３次元の極座標（球座標とも言う）を使う。ただ、これから示すように、極座標系に移ると成分で表したNewtonの運動方程式の形は直交座標系の場合と変わり複雑になる。しかし、その便利さの方が優位なために多く使われる。この章では２次元極座標を中心に話を進め、３次元の場合はその結果のみ示すことにする。

4.1　2次元極座標（平面極座標）

下の左図のように、位置ベクトル $\mathbf{r}$ で表される点 P を２次元直交座標では (x, y) のように記すが、２次元極座標では「原点からその点までの距離」 $r = |\mathbf{r}|$ と 「x 軸からの角度」 φ を使い、(r, φ) のように表す[2]。このとき、(x, y) と(r, φ) の関係は、

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi \qquad (4\text{-}1\text{-}1)$$

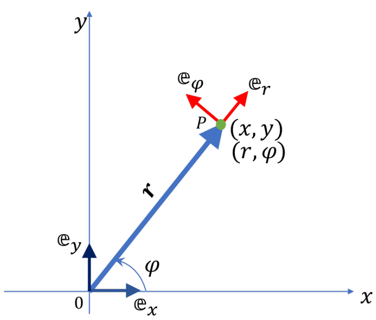
のようになることはすぐにわかる（図参照）。

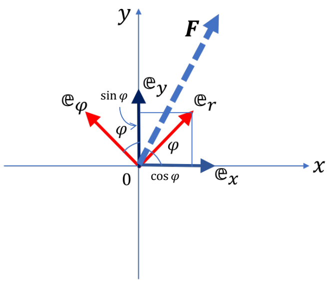
直交座標での単位ベクトル（基本ベクトルとも言う）を $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ と書くことにする。極座標での単位ベクトルは、図のように動径方向（$\mathbf{r}$の方向）に $\mathbf{e}_r$ と、それに直角方向（「偏角」方向、あるいは、「方位角」方向という）に $\mathbf{e}_\varphi$ をとる。単位ベクトルであるから $|\mathbf{e}_r| = |\mathbf{e}_\varphi| = 1$. また、$\mathbf{e}_r \perp \mathbf{e}_\varphi$ なので、それらの内積はゼロになる ($\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0$)。

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ と $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ の幾何学的な関係を下の右図に示した。$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ は図の xy 座標軸を反時計回りに φ だけ回転させた座標軸上での単位ベクトルになっていることがわかる[3]。下の右図より $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ と $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ は、

$$\mathbf{e}_r = \cos\varphi\ \mathbf{e}_x + \sin\varphi\ \mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\ \mathbf{e}_x + \cos\varphi\ \mathbf{e}_y \qquad (4\text{-}1\text{-}2)$$

なる関係があることを導ける[4]。





[1] 例えば、半径Rの球の方程式は、直交座標では $x^2+y^2+z^2=R^2$ となるが、極座標では$r=R$と書ける。

[2] rは０から∞の間の値をとり、角度は０から２πの間に制限する。なお、角度は反時計回りを正と決める。

[3] $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\phi$のベクトルを平行移動して原点に集めて考えている。

[4] これを示しなさい。

また、(4-1-2)式は行列を使い、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} \qquad \text{(4-1-3)}$$

とも書ける。

２次元平面の任意のベクトルは、単位ベクトル$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$、あるいは、 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ の１次結合で表すことができる。例えば、力のベクトル $\mathbf{F}$ は、

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{e}_x + F_y\mathbf{e}_y \text{（直交座標）}$$
$$\mathbf{F} = F_r\mathbf{e}_r + F_\varphi\mathbf{e}_\varphi \text{（極座標）} \qquad \text{(4-1-4)}$$

のように書ける。ここで、F_x, F_y は それぞれ $\mathbf{F}$ のx 成分、y 成分である。F_r, F_φ は それぞれ $\mathbf{F}$ の r 成分（動径成分）、φ 成分（偏角成分）と呼ぶ。また、直交座標成分 F_x, F_y と極座標成分 F_r, F_φ の間には、(4-1-2)、あるいは(4-1-3)式と同じ関係が成り立つ。

$$F_r = \cos\varphi\ F_x + \sin\varphi\ F_y$$
$$F_\varphi = -\sin\varphi\ F_x + \cos\varphi\ F_y \qquad \text{(4-1-5)}$$

これを求めるには、(4-1-4)式に(4-1-2)式を代入し変形する。もっとスマートに求めるには(4-1-2)式の両辺にFをかけ（内積を取り）、$\mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_r = F_r$ 、$\mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_x = F_x$ などを使えば良い。

ところで、極座標の単位ベクトルと直交座標での単位ベクトルには大きな違いがあることを注意しておく。それは、**質点が移動するとともに r 方向とφ 方向が時間変化するので、極座標の単位ベクトルは向きも時間も変化する**ことである。これに対し、直交座標の単位ベクトルは座標軸に固定されていて時間変化しない。　このことは、極座標での運動方程式を求める際、特に重要になる。

4.2　2次元極座標での運動方程式

Newtonの運動方程式 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ は、直交座標で書くと、

$$F_x = m a_x = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = m\ddot{x}\text{、} \qquad \text{(4-2-1)}$$

$$F_x = m a_y = m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = m\ddot{y} \qquad \text{(4-2-2)}$$

である。（ここで、a_x, a_y は、それぞれ加速度のx成分、y成分、$\ddot{x}, \ddot{y}$ は$x(t), y(t)$ の時間に関する２階微分の簡略した記法である[5]。ドットの数は微分の階数を表すので、もし１階微分ならドットを１個だけつける。）

[5] 時間微分に対してドットをつける方法はNewtonが使った微分表記の仕方である。極座標での記述ではこのNewtonの微分記号を良く使う。

これにならって、極座標で、

（**<u>注意：正しくない式</u>**） $F_r = m\dfrac{d^2 r(t)}{dt^2} = m\ddot{r}$、$F_\varphi = m\dfrac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = m\ddot{\varphi}$ (4-2-3)

と**<u>書いてはいけない</u>**。正しい極座標での運動方程式は、

（**<u>正しい式</u>**）$F_r = m a_r = m\left(\dfrac{d^2 r(t)}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\varphi(t)}{dt}\right)^2\right) = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)$ (4-2-4)

（**<u>正しい式</u>**）$F_\varphi = m a_\varphi = \dfrac{m}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\varphi(t)}{dt}\right) = \dfrac{m}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})$ (4-2-5)

のようになる。このように、極座標では変数の記号が変わるだけでなく方程式自身の形が変わる。<u>これは質点の運動に伴い極座標の単位ベクトルの向きも時間ともに変化するからである</u>。以下の節で、 (4-2-4)式、(4-2-5)式を求めることにする。

4.2.1 ２次元極座標での単位ベクトルの時間変化（準備）

質点が２次元平面を運動する場合、r 方向とφ 方向も質点の動きに伴い変化する。したがって、極座標の単位ベクトルの向きも時間ともに変化することになる。

これを求めるため、(4-1-2)式の時間微分を計算する。

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \frac{d}{dt}(\cos\varphi\ \mathbf{e}_x + \sin\varphi\ \mathbf{e}_y) = -\sin\varphi\ \dot{\varphi}\ \mathbf{e}_x + \cos\varphi\ \dot{\mathbf{e}}_x + \cos\varphi\ \dot{\varphi}\ \mathbf{e}_y + \sin\varphi\ \dot{\mathbf{e}}_y$$

$$= -\sin\varphi\ \dot{\varphi}\ \mathbf{e}_x + \cos\varphi\ \dot{\varphi}\ \mathbf{e}_y$$

$$= \dot{\varphi}(-\sin\varphi\ \mathbf{e}_x + \cos\varphi\ \mathbf{e}_y) = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \qquad (4\text{-}2\text{-}6)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{d}{dt}(-\sin\varphi\ \mathbf{e}_x + \cos\varphi\ \mathbf{e}_y) = -\cos\varphi\ \dot{\varphi}\ \mathbf{e}_x - \sin\varphi\ \dot{\mathbf{e}}_x - \sin\varphi\ \dot{\varphi}\ \mathbf{e}_y + \cos\varphi\ \dot{\mathbf{e}}_y$$

$$= -\cos\varphi\ \dot{\varphi}\ \mathbf{e}_x - \sin\varphi\ \dot{\varphi}\ \mathbf{e}_y$$

$$= -\dot{\varphi}(\cos\varphi\ \mathbf{e}_x + \sin\varphi\ \mathbf{e}_y) = -\dot{\varphi}\mathbf{e}_r \qquad (4\text{-}2\text{-}7)$$

ここで、$\dot{\mathbf{e}}_x = 0, \dot{\mathbf{e}}_y = 0$ を使った（<u>直交座標の単位ベクトルは固定されているので時間変化しない</u>）。ごちゃごちゃしたので、まとめると、

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \quad 、\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\mathbf{e}_r \qquad (4\text{-}2\text{-}8)$$

という簡潔な結果になる。

4.2.2 2次元極座標での速度と加速度の成分の表式

極座標で位置ベクトルを表すと、$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ となる[6]。速度は、$\dot{\mathbf{r}}$ なので、 (4-2-8)式を使うと、

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d(r\mathbf{e}_r)}{dt} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \qquad (4\text{-}2\text{-}9)$$

となる。すなわち、速度の動径方向成分(r成分）と偏角成分（φ 成分）は、(4-2-9)式より、

$$v_r = \dot{r}, \qquad (4\text{-}2\text{-}10)$$

$$v_\varphi = r\dot{\varphi} = r\omega \qquad (4\text{-}2\text{-}11)$$

となる。$\dot{\varphi}$ は角度の時間変化なので**「角速度」**と呼ばれていて、$\omega \equiv \dot{\varphi}$ とオメガの記号で書かれることも多い。

加速度の r成分と φ 成分は、(4-2-9)式を微分し(4-2-8)式の関係を使うと、

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi)}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi \qquad (4\text{-}2\text{-}12)$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi \qquad (4\text{-}2\text{-}13)$$

と求まる。途中計算は省いたが自分で計算してみよ。

したがって、加速度の r成分と φ 成分は、

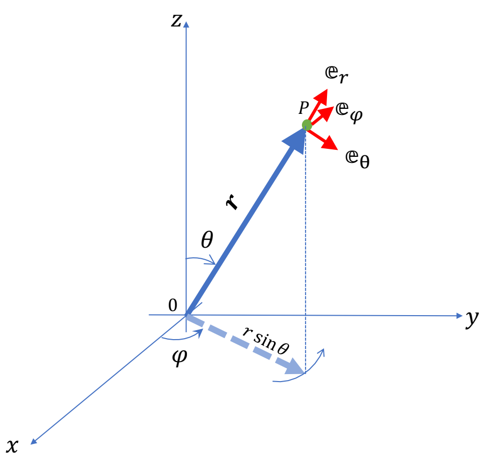
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \qquad (4\text{-}2\text{-}14)$$

$$a_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \qquad (4\text{-}2\text{-}15)$$

となる。これに質量をかけると、極座標での運動方程式(4-2-4)、(4-2-5)式が求まる。

4.3 3次元極座標（球座標、空間極座標）での運動方程式

３次元の極座標は、位置ベクトル $\mathbf{r}$ の指す点 (x, y, z) を (r, θ, φ) のように、「動径」、「天頂角」、「偏角（方位角）」で表す(右下の図を見よ）。$r = |\mathbf{r}|$ は $0 \le r < \infty$、θ はz軸からの傾きで $0 \le \theta \le \pi$、また、φ は$\mathbf{r}$のxy平面への射影がx軸からなす角度で $0 \le \varphi < 2\pi$ の範囲をとる。



(x, y, z) と(r, θ, φ) には、右図より、

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad (4\text{-}3\text{-}1)$$
$$z = r\cos\theta$$

の関係があることがわかる。

---

[6] 4-1節の図を見よ。

２次元の場合と同様に、単位ベクトル $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ を考えることができ、任意の３次元空間のベクトルは$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ の１次結合で表すことができる。例えば、力のベクトルは、

$$\mathbf{F} = F_r\mathbf{e}_r + F_\theta\mathbf{e}_\theta + F_\varphi\mathbf{e}_\varphi \quad \text{（極座標）} \qquad (4\text{-}3\text{-}2)$$

とかける。ここで、F_r, F_θ, F_φ はそれぞれ $\mathbf{F}$ の動径(r)成分、天頂角(θ)成分、偏角(φ)成分である。

証明なしに３次元極座標での運動方程式を書いておく。

$$F_r = ma_r = m\ddot{r} - mr(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) \qquad (4\text{-}3\text{-}3)$$

$$F_\theta = ma_\theta = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - mr^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta \qquad (4\text{-}3\text{-}4)$$

$$F_\varphi = ma_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta) \qquad (4\text{-}3\text{-}5)$$

（ここで、$\theta = 90\,\mathrm{deg}$（定数）とおけば２次元極座標の運動方程式(4-2-4)(4-2-5)式と一致する。）

また、３次元極座標での勾配(grad)は、

$$\mathrm{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \qquad (4\text{-}3\text{-}6)$$

であることを示せる[7]。これは、３次元極座標において、その微小体積

$$dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi \qquad (4\text{-}3\text{-}7)$$

を考えた時の各方向の微小変位が、$dr, rd\theta, r\sin\theta d\varphi$ である[8]ことからも予想される。

ポテンシャルと力の関係、$\mathbf{F} = -\,\mathrm{grad}\ U$ をgradの極座標表示 (4-3-6)式を使って書き表すと、

$$\mathbf{F} = -\,\mathrm{grad}\ U = -\left(\frac{\partial U}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right) \qquad (4\text{-}3\text{-}8\ )$$

となる。

7 ここでは証明をしない。数学（解析）か物理数学の教科書をみよ。

8 微小体積要素が(4-3-7)式で書けることは前ページの図よりすぐに求まる。確かめよ。

演習7

1. $\mathbf{a}=\dot{\mathbf{v}}=\dfrac{d(\dot{r}\,\mathbf{e}_r+r\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi)}{dt}$ を計算し、２次元極座標で、加速度の r成分と φ 成分が (4-2-10)、(4-2-11)式

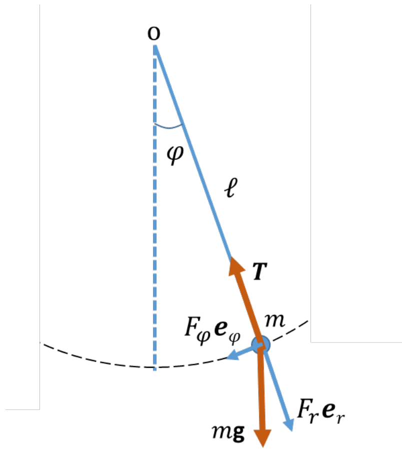
$a_r=\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2$ 、$a_\varphi=\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})=r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}$ 　となることを示せ。

2. 質量の無視できる長さ l の糸の先端に質量 m の質点がつけられた単振子がある。糸の張力をT、重力加速度を g として以下の設問に答えよ。摩擦や空気の抵抗などは無視できるとする。

（１）2次元極座標での単振子の運動方程式を書け（動径 r 方向、偏角 φ 方向の両方を示せ。ただし、φ は鉛直下方からの角度）。

（２）$\varphi \ll 1$の時、$\sin\varphi \sim \varphi$ と近似できる。これを使い、$\varphi \ll 1$（微小振動）の場合、偏角方向の方程式は単振動の方程式と同等になる事を示し、周期を求めなさい。

（３）求めた周期は糸の長さだけで決まり質量や振幅によらない（等時性）ことを確かめよ。



3. 極座標でのポテンシャルと力ベクトルの関係 (4-3-8)式を使い、万有引力のポテンシャル$U(r)=-\dfrac{GMm}{r}$ から 万有引力が　$\mathbf{F}(\mathbf{r})=-\dfrac{GMm}{r^2}\dfrac{\mathbf{r}}{r}$ となることを示しなさい[9]

4. 3次元極座標の無限小体積要素が $dV=r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$ と表せることを使い、極座標の積分から、半径 a の球の体積が$\dfrac{4\pi}{3}a^3$ であることを求めよ。

[9] 演習５の問3では直交座標で求めた。極座標で求める方がはるかに楽である。